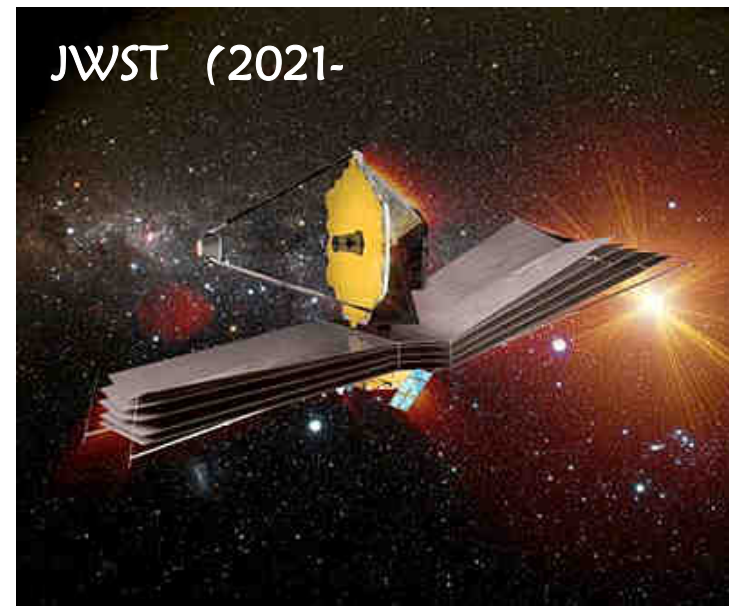
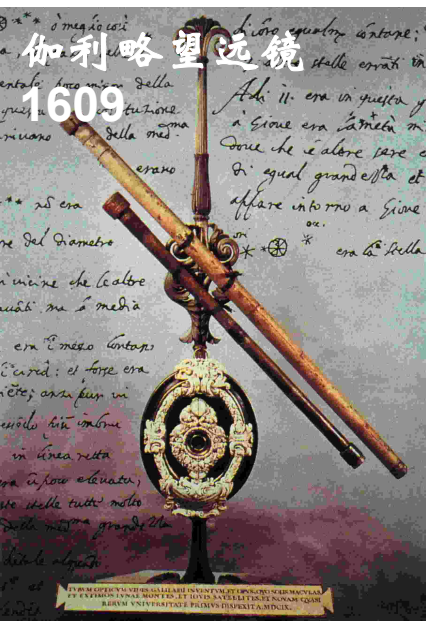


实测天文

Observational Astronomy



课程大纲（上部, 施勇）

➤ 课堂网页:

yong@nju.edu.cn

参考书:

Measuring the Universe: A Multiwavelength Perspective.
George Rieke 2013

实测天体物理学	黄佑然等	科学出版社	1987
---------	------	-------	------

天体物理方法	胡景耀	科学出版社	1990
--------	-----	-------	------

观测天体物理学	刘学富	北师大出版社	1997
---------	-----	--------	------

课程大纲

► 考核方式:

平时: 50=

40: 作业

10: 课堂讨论和出勤率

期终考试: 50

课程大纲

- 第1章 绪论
- 第2章 望远镜
- 第3章 紫外，光学与红外波段探测器
- 第4章 紫外，光学与红外成像仪
- 第5章 测光与偏振
- 第6章 光谱测量
- 第7章 自适应光学与高对比度成像

1 绪论

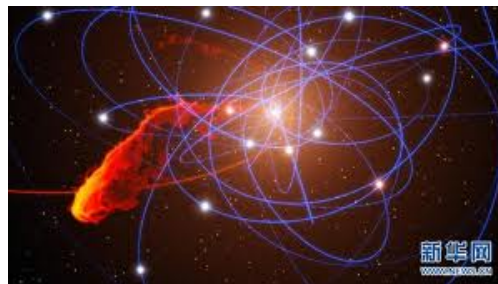
- 1.1 实测天文学的科学意义
- 1.2 电磁辐射
- 1.3 地球大气的影响
- 1.4 影响观测其他因素
- 1.5 光学系统
- 1.6 概率，统计与误差

1.1 科学意义

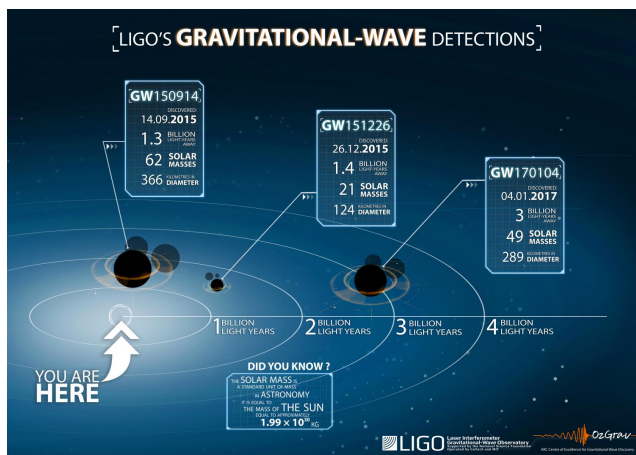
➤ 天文学是一门基于观测的学科,在各个天文领域上的突破依赖于大量的细致的观测事实。



1923年,哈勃对M31和M33距离的测定证实了宇宙岛假说。



过去20年,对银河系中心恒星运动的监测提供了强有力的证据表明超大质量黑洞的存在。



2015年,首次直接探测到引力波辐射。



1.1 科学意义

➤ 天文学的进步依赖于技术的突破。

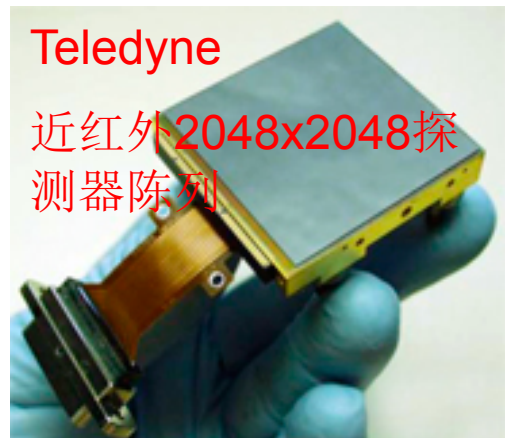
光学波段上的技术进步始于伽利略。开始是望远镜，最近还包括终端仪器。

过去60年，天文学的巨大进步得益于新波段上开发新技术：射电，X射线，红外和伽马射线。

近些年，包括亚毫米，硬X射线/伽马射线，冷红外望远镜，自适应光学，中微子和万有引力探测。



伽利略望远镜



Teledyne

近红外2048x2048探测器阵列

1.1 科学意义

- 20世纪50年代后，新技术的发明和突破具有极短的周期（5年），而天文所涉及到的基本物理是百年的周期，这就要求我们了解各种基础性的以及最新的天文探测技术。

1 绪论

- 1.1 实测天文学的科学意义
- 1.2 电磁辐射
- 1.3 地球大气的影响
- 1.4 影响观测其他因素
- 1.5 光学系统
- 1.6 概率，统计与误差

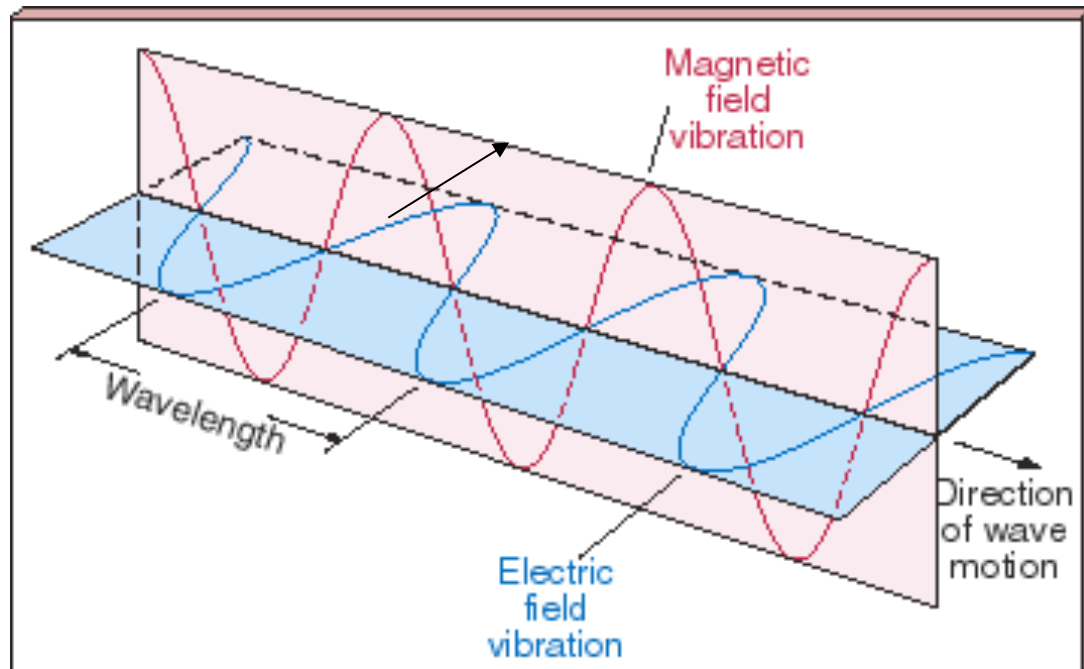
1.2 电磁辐射

- 任何物体都在不断地向周围空间以电磁波形式辐射能量。
- 电磁辐射几乎携带着现代天体学得以构建的所有信息。

1.2 电磁辐射

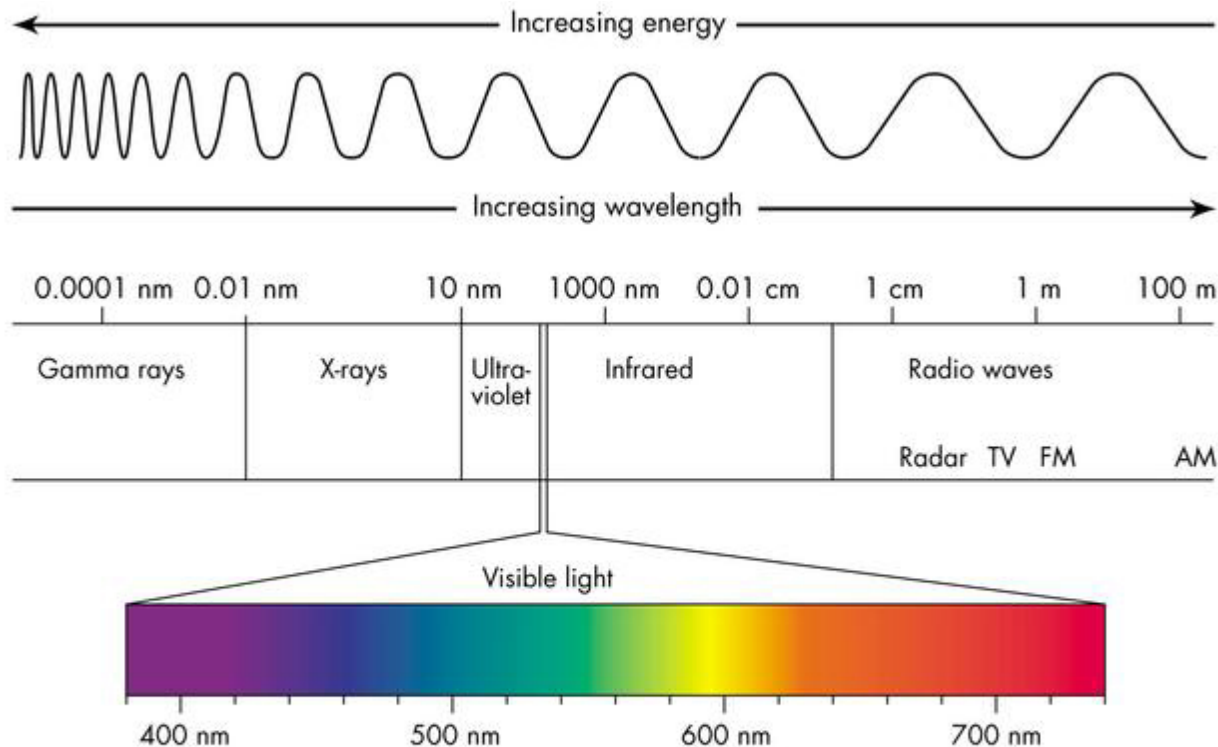
➤ 电磁辐射是以**周期性变化**的电磁场传递能量、具有波动性。

$$(\text{波长 } \lambda) \times (\text{频率 } \nu) = \text{光速 } c = 3 \times 10^{10} \text{ cm s}^{-1}$$



1.2 电磁辐射

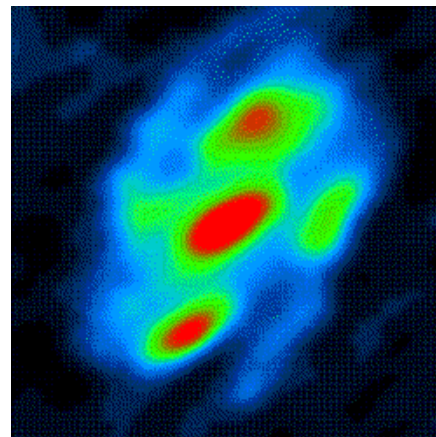
- 根据波长由长到短，电磁辐射可以分为射电、毫米、亚毫米、红外、光学、紫外、X射线和 γ 射线等波段，可见光又可分解为七色光。



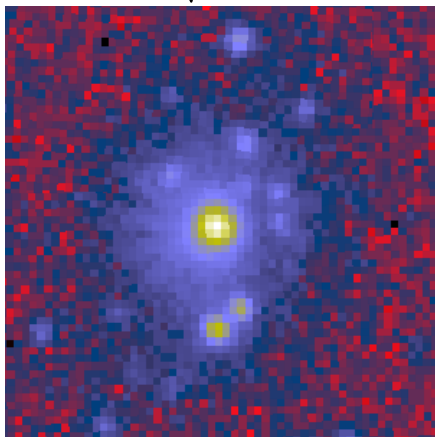
➤ 不同波段的旋涡星系M81



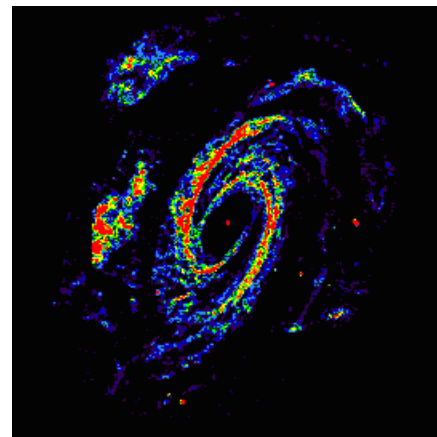
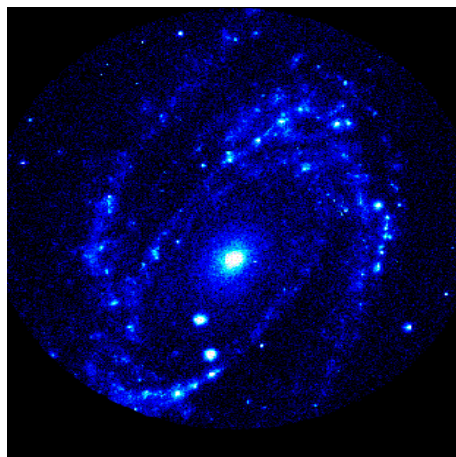
光学
远红外



中红外

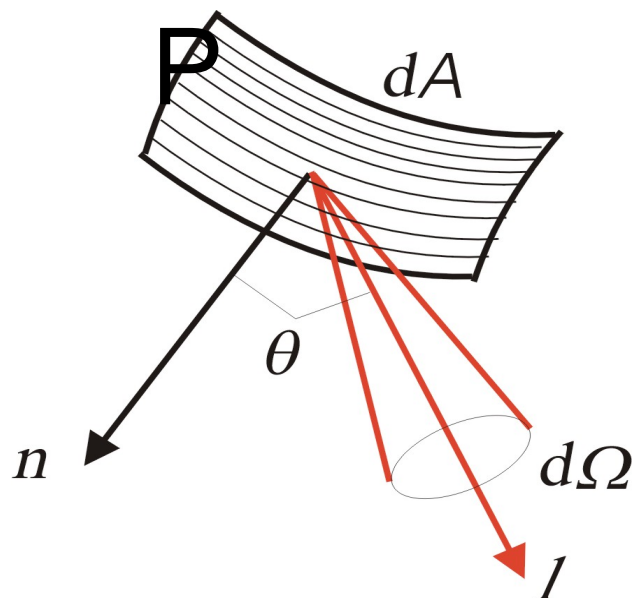


X射线
射电



紫外

1.2 电磁辐射

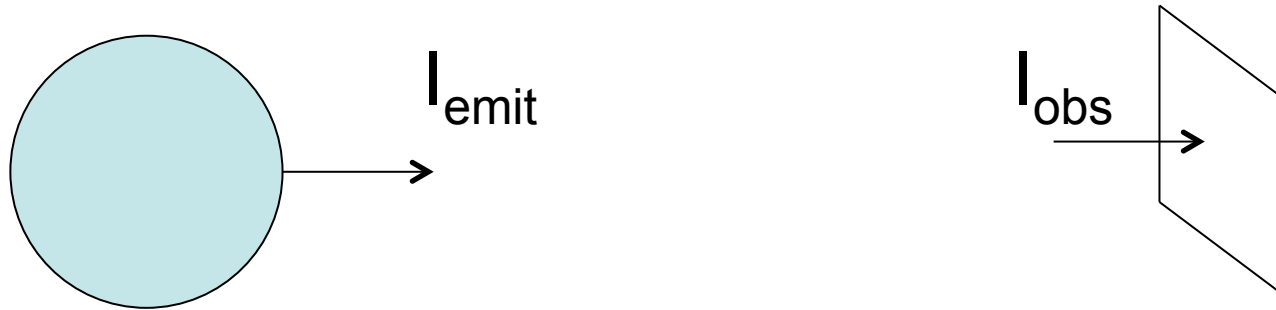


辐射强度 I_ν 的定义:

$$I_\nu = dW / (dA \cdot \cos \theta \cdot d\Omega \cdot d\nu)$$

朝 l 方向的单位面元、单位立体角、（在频率 ν 处的）
单位频率间隔内的辐射功率。

1.2 电磁辐射



天体跟观测者之间如无其他辐射或吸收，
那么：

$$I_{\text{emit}} = I_{\text{obs}}$$

1.2 电磁辐射

➤ 辐射强度也可以定义在波长上，满足：

$$I_\nu \cdot d\nu = -I_\lambda \cdot d\lambda = \frac{c}{\nu^2} \cdot I_\lambda \cdot d\nu$$



1.2 电磁辐射

➤ 黑体谱的辐射强度

$$I_\nu = B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \cdot \frac{1}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

$$I_\lambda = B_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{hc/kT\lambda} - 1}$$

斯特藩定律: $W / A = \sigma T^4$

怎么推导?

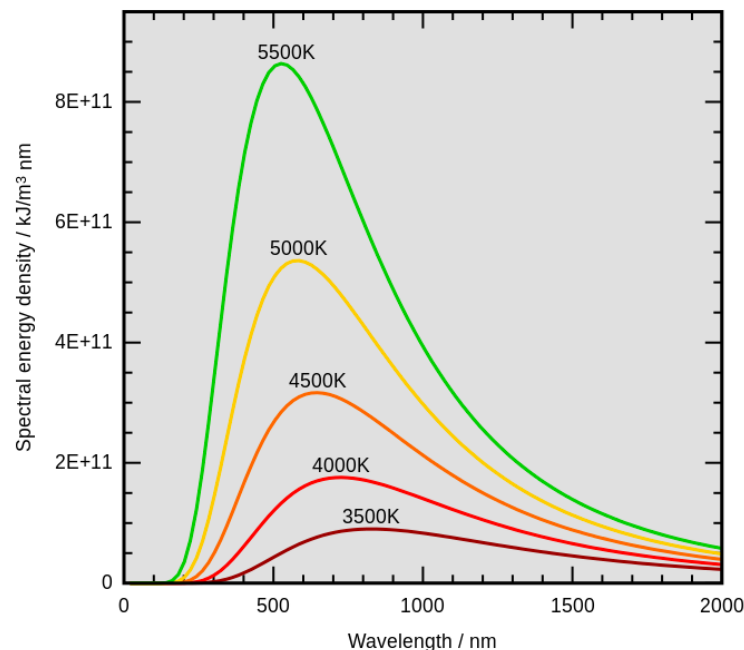
1.2 电磁辐射

维恩近似: $B_\nu(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT} \quad (h\nu \gg kT)$

瑞利-金斯定律: $B_\nu(T) = \frac{2kT}{\lambda^2} = \frac{2kT\nu^2}{c^2} \quad (h\nu \ll kT)$

维恩位移定律: 黑体谱辐射强度
最大值所在波长跟其温度成反
比, 满足如下公式

$$\lambda_{\max} T = 2897 \mu\text{m K} \approx 3000 \mu\text{m K}$$



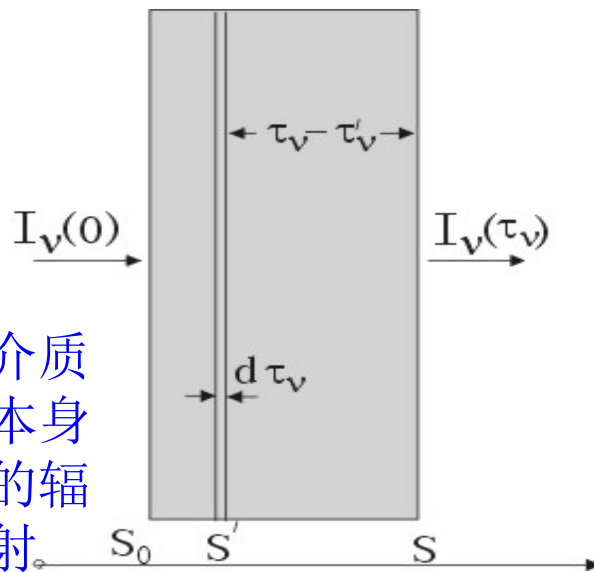
1.2 电磁辐射

右图：介质的辐射和吸收对入射辐射的影响。

单位长度辐射的改变量

介质对辐射的吸收

介质本身的辐射



$$\frac{dI_v}{ds} = -k_v I_v + j_v \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dI_v}{d\tau_v} = -I_v + S_v$$

$$I_v(\tau_v) = I_v(0)e^{-\tau_v} + \int_0^{\tau_v} S_v(\tau_v')e^{-(\tau_v - \tau_v')}d\tau_v'$$

1.3 地球大气的影响

➤ 1.3.1 大气垂直结构

➤ 1.3.2 大气成分

➤ 1.3.3 地球大气的影响

✧ 大气消光

✧ 大气折射

✧ 大气辐射

✧ 大气湍动：seeing问题

1.3.1 大气垂直结构

➤ 大气垂直结构：

其压力、密度、温度
随高度的变化。

地球大气层	
散逸层	(800km ~ 2000km至3000km)
热层	(80至85km ~ 800km)
中间层	(50km ~ 80至85km)
平流层	(7至11km ~ 50km)
对流层	(0km ~ 7至11km)

1.3.2 大气成分

➤ 大气的主要成分是氮分子和氧分子，此外还有臭氧、二氧化碳、水蒸气、甲烷、氧化氮、尘埃和电离层等。

■ N_2 , O_2 和 O_3 : 产生吸收带，影响紫外观测。

■ CO_2 , H_2O , CH_4 和 NO : 影响红外、亚毫米波、毫米波和厘米波。

■ 尘埃: 影响红外及更短波长的观测。

■ 电离层: 影响射电观测。

1.3.3 地球大气的影响

地球大气的四类影响：

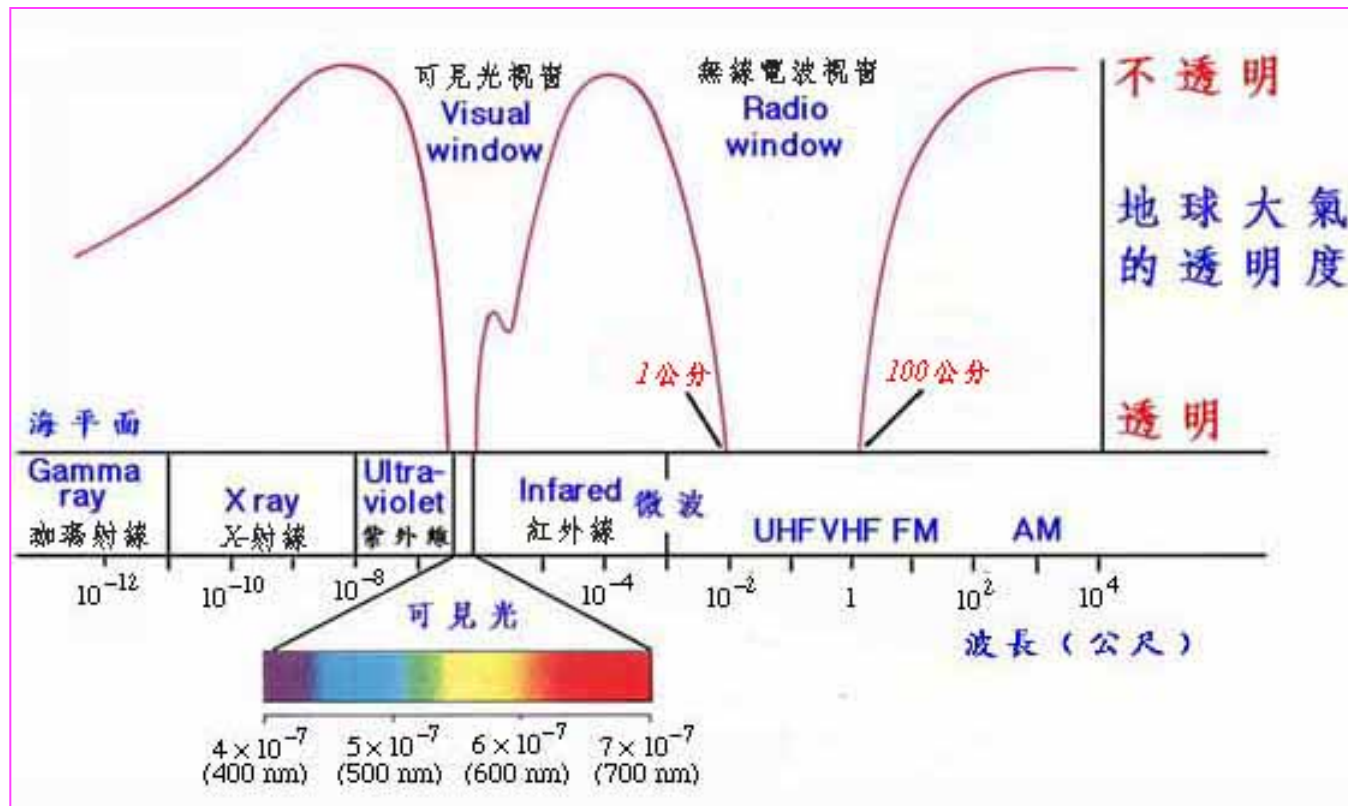
- 大气的吸收和散射，改变天体辐射的强度和颜色。通常称为“**大气消光**”。
- 改变天体辐射的方向。即**大气折射**，或称“蒙气差”。
- **大气**本身的**辐射**，影响地面红外天文观测。
- **大气湍动**，影响光学成像的质量。

(1) 大气消光

- 地球大气消光的物理机制是大气分子和固体颗粒对辐射的**吸收和散射**作用。
- 它既减弱了天体辐射的**强度**，又改变了天体辐射的**能谱**（使天体的颜色发生变化）。
- 最明显的例子是日出（或日落）的太阳颜色与中午时几乎完全不同，这就是大气消光的缘故。

(1) 大气消光

➤ **大气窗口**：地球大气对各波段电磁辐射的消光情况，称之为“**大气窗口**”。



(1) 大气消光

✧ a. 在**可见光**区域（3500-7000Å），大气的吸收很小，主要是大气的散射作用使辐射减弱，但不厉害。**射电波段的厘米波和米波**也基本不受大气吸收的影响。

Keck

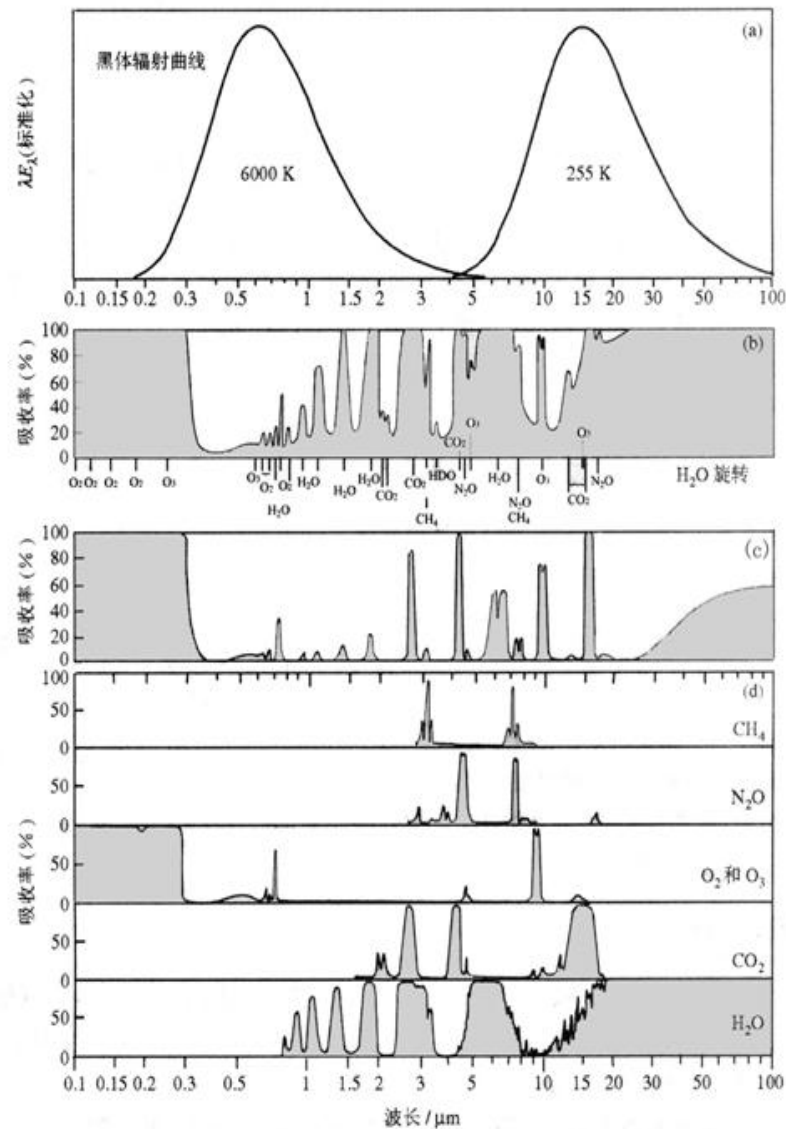


Very Large Array



(1) 大气消光

✧ b. 由于氮分子、氧分子以及臭氧的吸收，地面上几乎接收不到波长小于3000Å的电磁辐射，所以紫外波段无法在地面观测。



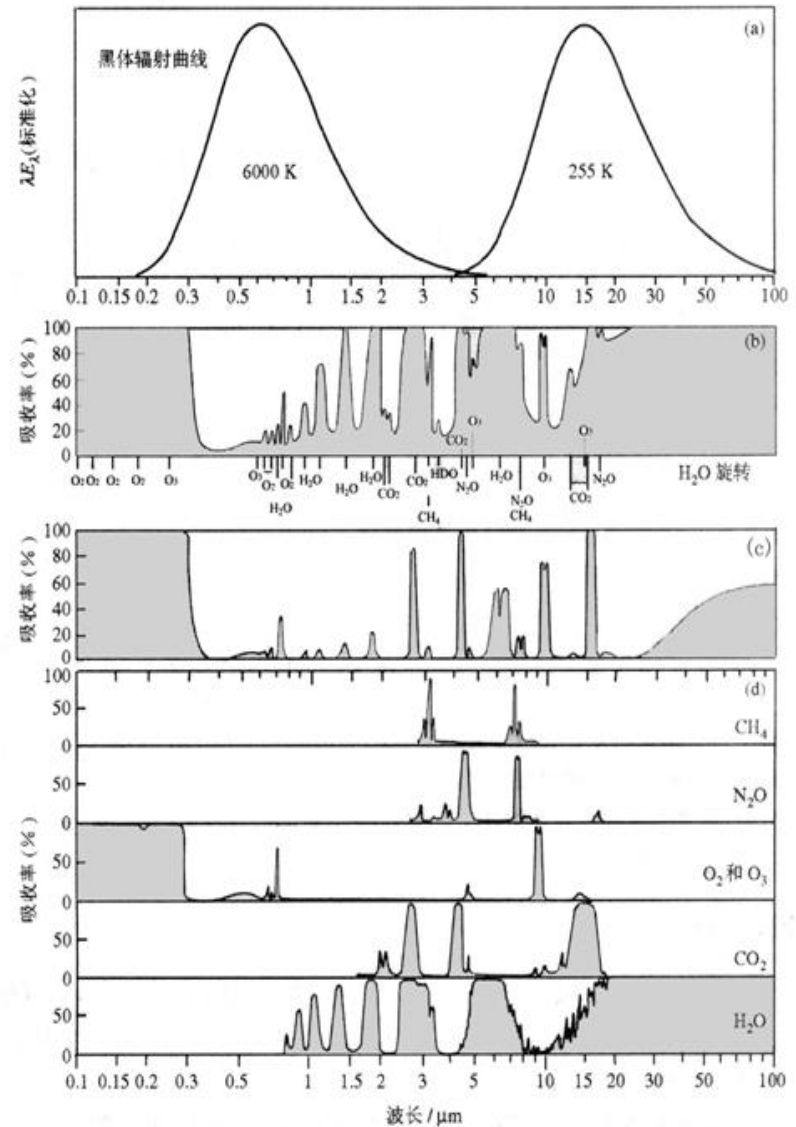
(1) 大气消光

✧c. 在地面上根本无法观测来自天体的X射线和 γ 射线



(1) 大气消光

✧ d. 大气中的水蒸气、二氧化碳和甲烷对红外和毫米波辐射吸收相当强。尽管如此，大气层给红外和毫米波辐射留下了几个小窗口。



(1) 大气消光

- 由于地球大气的密度随高度呈指数减小，因此**下层大气**的消光作用是主要的，如果选择较高的山峰进行天文观测，大气消光的影响将显著减小，这也是天文台常建在高山上的原因。



(1) 大气消光

➤ 大气消光严重歪曲了天体的亮度和颜色，为了得到天体的真实辐射情况，必须对地面上的观测结果进行消光改正，这是实测天体物理学的重要内容之一。

(2) 大气折射

- 大气折射改变电磁波的传播方向，不同方位角的辐射以及不同波长的辐射其折射角度不一样。
- 对于射电辐射，当其波长大于电离层等离子体的振荡波长时，会引起电离层的全反射而使天体辐射无法穿过大气到达地面。射电辐射中的厘米波、米波能通过电离层被地面接收。

(3) 大气辐射

➤ 地球大气辐射有两种机制：**荧光和热辐射**。大气辐射在**可见光、红外和毫米波段**造成地面观测受到限制：

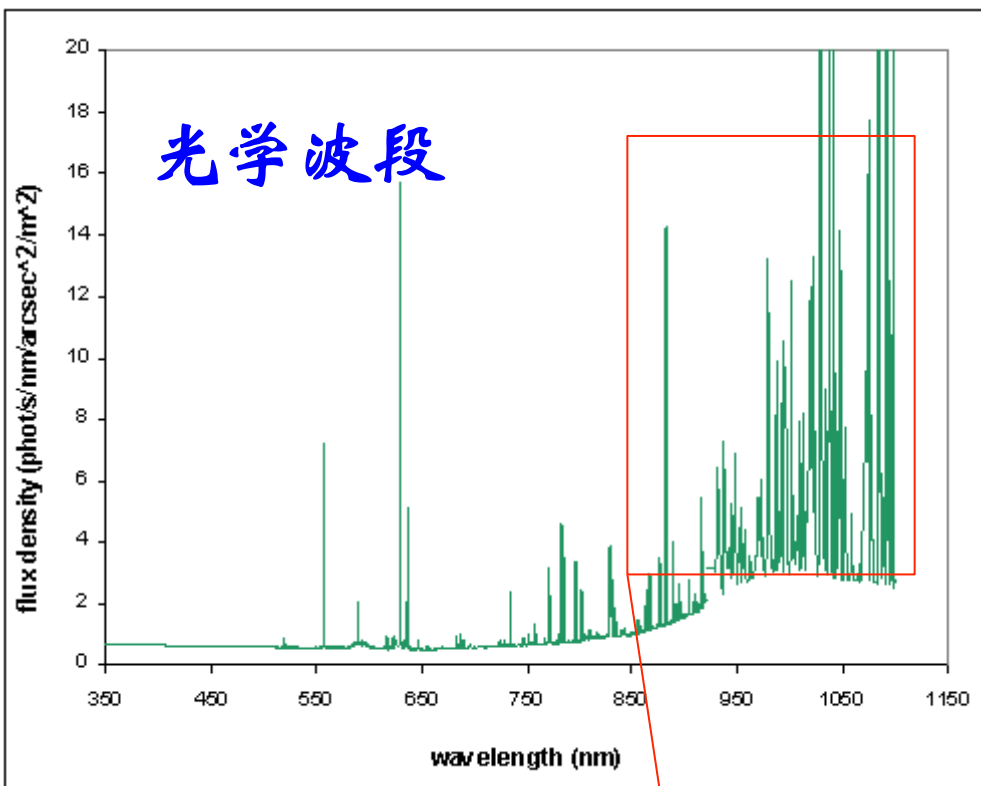
a. 荧光发射

电离层中电子与离子复合产生**荧光发射线**。在100km处电子密度低，碰撞退激发不重要，主要的辐射源有：OI、NaI、O₂、OH、H。

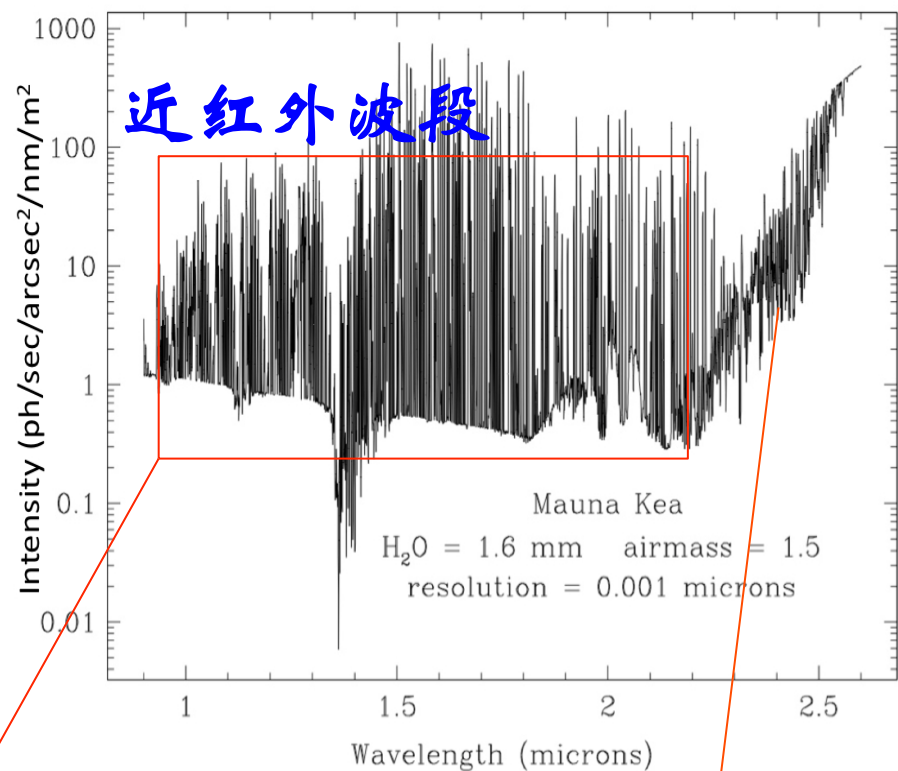
b. 热辐射

来自一群不同温度黑体辐射的叠加，辐射强度的极大处大约在10 μm。

(3) 大气辐射



荧光发射



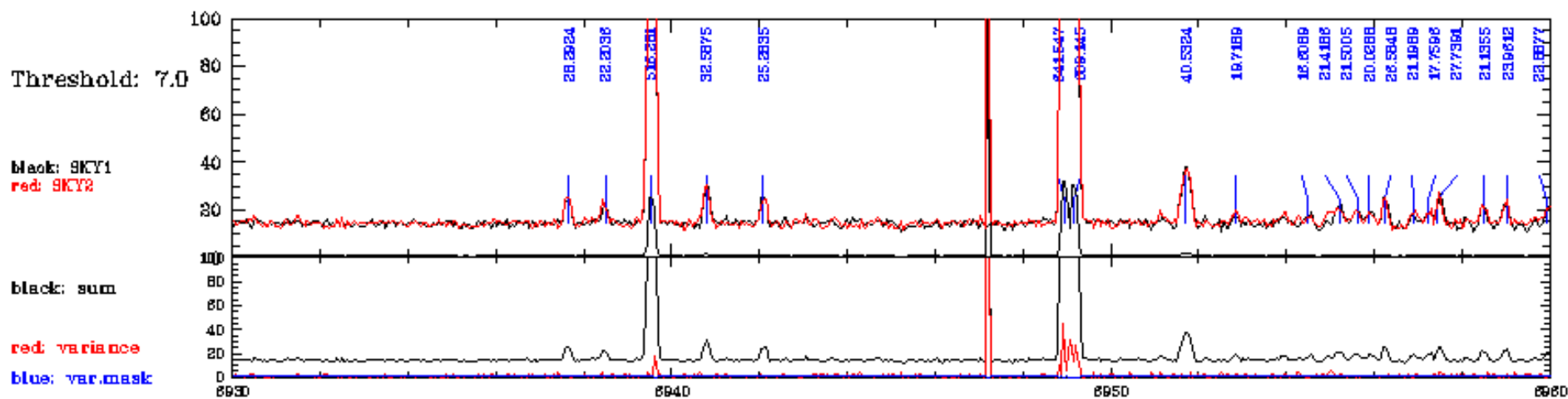
热辐射

(3) 大气辐射

天空发射线:



MIDAS_66 graph_1



(3) 大气辐射

- 利用大气辐射以及斯特藩定律说明小行星撞地球使得恐龙灭绝。



$\sigma T^4 = W_0$, 其中 $T = 300\text{K}$, W_0 为到达地球的太阳总辐射。

小行星撞地球所扬起的灰尘包裹住地球, 使得到达大气的辐射减少到原先的一半 $\sigma T'^4 = 0.5W_0$ 。

$$T' = 252\text{K} = -20\text{摄氏度}$$

(4) 大气湍动：seeing问题

- Seeing在天文学领域称为“视宁度”。
- 由于大气中微弱但总是存在的不规则气流，使得星象在极短时标曝光下总是显得闪烁不定。视宁度就是大气扰动造成星光闪烁的程度。视宁度的单位是“角秒”（arcsec）。
- 地面上最好的视宁度约为0.5角秒（智利和夏威夷）。

(4) 大气湍动: seeing问题

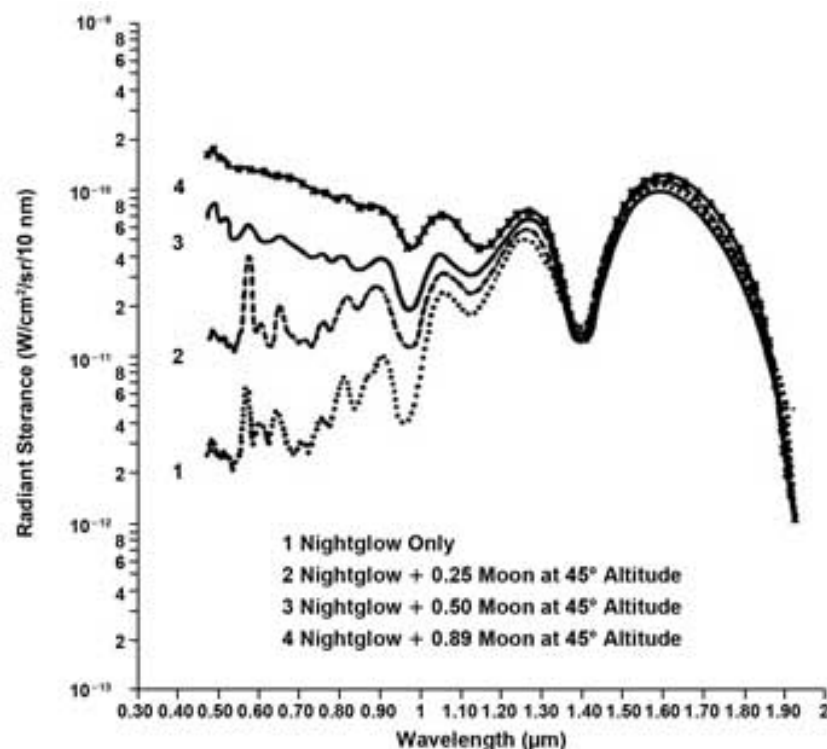


1.4 影响观测的其它因素

- **黄道**：黄道面上有很多尘埃（如小行星带）。
- **银河消光**：来自天体的辐射除了要穿过地球大气层以外，还要穿过银河系的星际介质，这是无法避免的，称为银河消光。银河消光使得**远紫外和软X射线（0.02keV-0.2keV）**的辐射无法通过，**几十米长的射电辐射**也不行。

1.4 影响观测的其它因素

- **月光：**对光学短波影响很大，对光学长波以及近红外影响小；地面可见光的观测需要避开大月亮天。

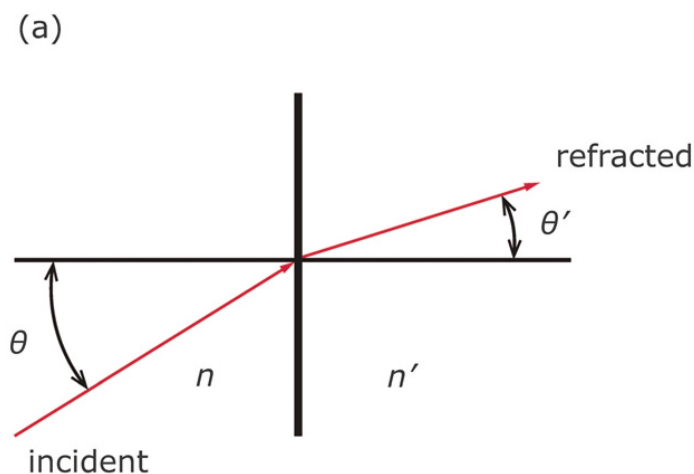


1.5 光学系统

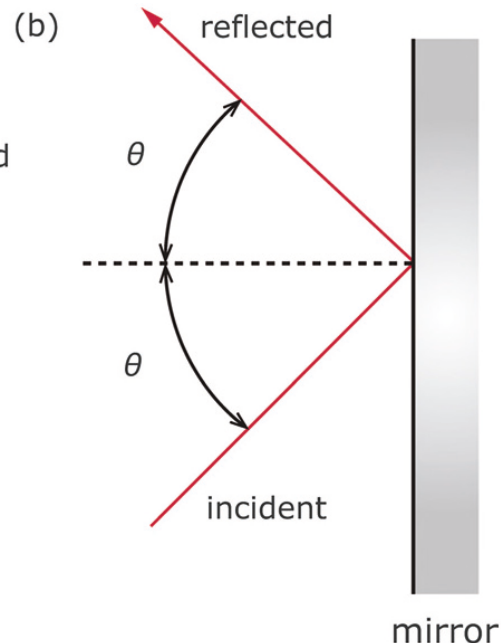
➤ 透镜(lens): 折射, 满足斯涅尔定律 (左下图)。

注: 现代望远镜主镜一般不用透镜。

➤ 反射镜(mirrors): 反射 (右下图)



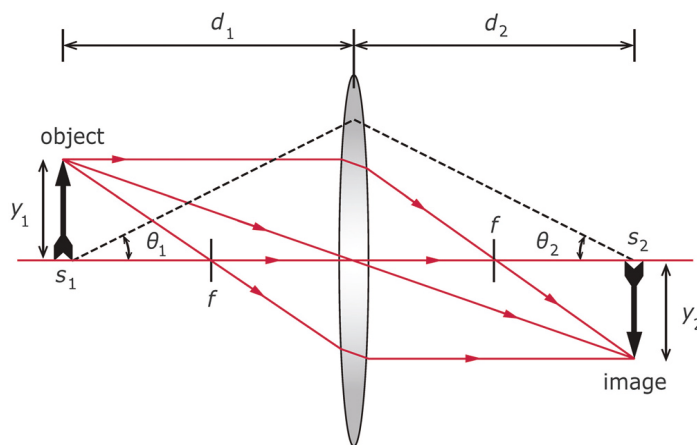
$$n \sin(\theta) = n' \sin(\theta')$$



$$\theta = \theta'$$

1.5 光学系统：薄镜成像规律

- 假定镜子的厚度可以忽略。
- 对于实际器件，也提供很好的一阶近视



规律1:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$$

f 是焦距， d_1 是物体到镜子的距离， d_2 是所成像到镜子的距离。

规律2:

$$y_1 d_2 = y_2 d_1$$

其中， y_1 是物的高度， y_2 是像的大小。

1.6 概率，统计与误差

➤ 1.6.1 必要性

➤ 1.6.2 概率分布

➤ 1.6.3 统计

➤ 1.6.4 误差传递公式

➤ 1.6.5 拟合数据：最小二乘法

➤ 1.6.6 比较数据

1.6.1 必要性

➤ 观测结果是否可信？

如：测到一白矮星的质量为 $2.0M_{\text{sun}}$ （注：理论上限为 $1.44M_{\text{sun}}$ ）。

➤ 模拟观测：

■ 决定样本大小。

如要证明10%的类太阳恒星中有类地行星，需要观测多少颗恒星？

■ 理解重复观测的可能结果。

➤ 比较观测结果：

■ 两组观测结果是否一致？

■ 观测结果是否完全独立？

1.6.2 概率分布

➤ **概率分布**：对一个物理量很多次测量，会得到一组围绕真实值的不同测量值。这组测量值的分布称之为概率分布。

➤ **无差别原则**：

假设 n 次**相互独立，完全穷尽**的可能性，如果这些可能性之间除了名称之外没有任何其他任何区别，那么每个可能性的概率为 $1/n$ 。

丢硬币：正面跟负面的概率 $=1/2$ 。

去书店买书：书的封面是红色和非红色的概率 $=1/2$ （这个陈述是错误的，因为颜色除了红色还有其他颜色，即没有完全穷尽）

1.6.2 概率分布

➤ 概率分布可以是任何数学函数,但需满足两个条件:

$$1. \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1$$

2. 给定 x 上的概率 $P(x)$ 是单一且为正数。

➤ 给定区间内的总概率

$$\text{prob}(a < x < b) = \int_a^b P(x) dx$$

1.6.2 概率分布

➤ 概率分布几个重要的参数：

平均值： $\mu = \int xP(x)dx$

方差： $\sigma^2 = \int (x - \mu)^2 P(x)dx = \int x^2 P(x)dx - \mu^2$

测量结果的表述： $\mu \pm \sigma$

上限： 3σ 5σ

➤ 三种天文学常用的分布包括二项分布，泊松分布和高斯分布。

1.6.2 概率分布：二项分布

- 二项分布 (binomial distribution) 是 n 个独立的 **是/非** 试验中 **成功的次数** 的 **离散概率分布**。其中每次试验的 **成功概率** 为 p 。
- 每次试验中只有两种可能的结果，而且是 **互相对立** 的，是独立的，与其它各次试验结果无关



1.6.2 概率分布：二项分布

单次观测成功的概率是 p ,那么如果总共观测 n 次,成功 m 次概率为

$$P(m, p, n) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}$$

如某气象站天气预报的准确率为80%,那么5次预报中恰有2次准确的概率为

$$P(m=2, p=0.8, n=5) = 10 \times 0.8^2 \times 0.2^3 \approx 0.05$$

成功次数不少于两次的概率是多少?

1.6.2 概率分布：泊松分布

当二项分布的 n 很大而 p 很小时，且 np 趋于一恒定值(定义 $\mu = np$)，二项分布近似为泊松分布：

$$P(m, \mu) = \frac{e^{-\mu} \mu^m}{m!}$$

μ 是成功的平均次数。

1.6.2 概率分布：高斯分布

高斯分布是连续分布，表征观测到 x 值的概率为：

$$P(x, x_0, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-x_0)^2/2/\sigma^2}$$

其中， x_0 是分布的中值， σ 是标准偏差。

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - x_0)^2$$

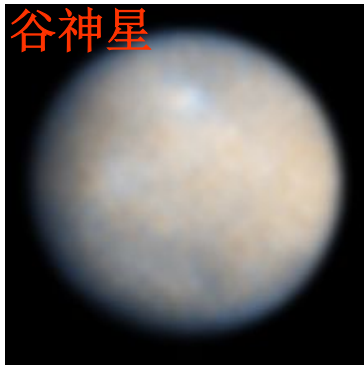
因 x_0 是无限次测量后的平均值，实际中用有限测量的平均值来近似：

$$\sigma^2 \equiv \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - \bar{x})^2$$

当二项分布的 n 很大，而 $p = 1 - p$ 时，
二项分布可以近似为高斯分布。

1.6.2 概率分布：高斯分布

- 高斯分布被广泛用来描述测量误差。



- 高斯分布被广泛地使用，因为中心极限定理指出大量相互独立的随机变量（不管其具体分布是什么），其均值的分布为高斯分布。

1.6.2 概率分布：高斯分布

➤ 高斯分布通常用来定义观测结果的置信区间：

 $|x - x_0| < \sigma$ 的可能性为68%

 $|x - x_0| < 2\sigma$ 的可能性为95%

 $|x - x_0| < 3\sigma$ 的可能性为99.7%

1.6.2 概率分布：几种分布平均值与方差

	平均值	方差
二项	np	$np(1-p)$
泊松	μ	μ
高斯	μ	σ^2

怎么推导？

1.6.2 概率分布：概率解释

➤ 频率概率 (frequentist probability)

客观的

概率定义为事件在多次实验中出现的相对频率。



正面为六点的概率为 $1/6$ 。

➤ 贝叶斯概率 (Bayesian probability)

主观的

概率定义为某人对一个命题的信任程度。



“正面六点的概率为 $1/6$ ”的可信度为80%。

[色子可能因制造工艺的原因重心不在几何中心]。

1.6.3 统计

➤ 统计与概率的关系：

- 统计仅仅使用观测数据。
- 统计可以用来估算概率分布，如在假设分布是高斯函数的情况下可以通过估算平均值和标准偏差来确立分布。

1.6.3 统计

- 即使在不清楚具体概率分布情况下，统计也可以用来评价结果的置信区间。即契比雪夫不等式 (Chebyshev inequality)

$$P(|x - \mu| > n\sigma) < \frac{1}{n^2}$$

n	P_ch(<)	P_Gauss(=)
1	1	0.32
2	0.25	0.05
3	0.11	0.003
4	0.06	0.00006

1.6.3 统计

➤ 常用的统计:

- 平均值: $\mu = \sum_i \frac{x_i}{n}$
- 中值: 把数按大小排序, 中间的值即为中指。
- 模式: 出现概率最大的数。
- 方差: $s^2 = \sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1}$
- 方差平方根: $s = \sqrt{\sum_i \frac{(x_i - \mu)^2}{n-1}}$
- 平均差: $\overline{\Delta x} = \sum_i \frac{|x_i - \mu|}{n-1}$

1.6.3 统计：光子

- 光子遵循玻色-爱因斯坦统计，所以严格上讲，每次光子的到达不是完全独立的，这导致了光子计数= n 个所对应的**误差平方**：

$$\langle N^2 \rangle = n \left[1 + \frac{\varepsilon \tau \eta}{e^{h\nu/kT} - 1} \right]$$

其中， $\langle N^2 \rangle$ 是误差的平方， n 是接收到的光子数， ε 是天体的发射系数， τ 是光学系统的透过率， η 是探测器的量子效率。

1.6.3 统计：光子

- 一般情况下，除了波长远长于黑体谱的峰值波长，上述公式可以近似为

$$\langle N^2 \rangle = n$$

$$\text{方均根} \langle N^2 \rangle^{0.5} = \sqrt{n}$$

即，光子数 n 是满足高斯分布。

1.6.3 统计：光子

- 当 $5\varepsilon\tau\eta kT/h\nu < 1$, 玻色-爱因斯坦光子噪声对方均根的修正小于10%。
- 现考虑一温度为1000K的恒星, 在什么波长流量到达峰值。假设光学系统透过率为50%, 探测器的量子效率为50%, 在什么波长玻色-爱因斯坦修正到达10%? ($h=6.626\times 10^{-34}$ J s, $k=1.38\times 10^{-23}$ J/K, $c=3.0\times 10^8$ m/s)。
3 μm , 12 μm

1.6.4 误差传递公式

有两个变量 x 和 y ,他们的误差分别为 σ_x 和 σ_y ,
且这两个量是完全独立得, 那么 $x + y$ 或 $x - y$
的误差是:

$$\sigma = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

类似地, $f = xy$ 或 $f = x/y$ 的误差是:

$$\sigma_{xy} = \sqrt{\sigma_x^2 y^2 + \sigma_y^2 x^2}$$

更一般地, $f = f(x, y)$ 的误差:

$$\sigma_f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2}$$



例子: $x_1 = 400 \pm 20, x_2 = 100 \pm 10, x_2 - x_1$ 的值及误差?

1.6.5 拟合数据：最小二乘法

对一组在 x_i 上的观测值 $y_i \pm \sigma_i$ 做线性拟合：

$$y = a + bx$$

假定每个 y_i 围绕最佳拟合值 $a + bx_i$ 是高斯分布

$$P_i \propto e^{-\frac{(y_i - y(x_i))^2}{2\sigma_i^2}}$$

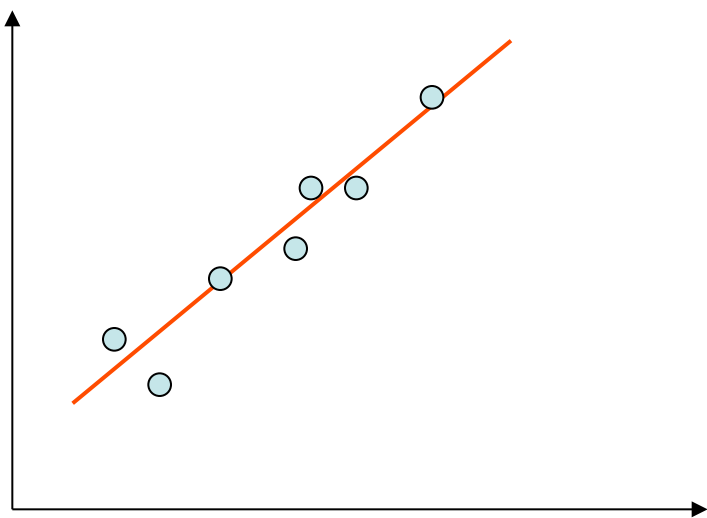
$$P = \prod_{i=1} e^{-\frac{(y_i - y(x_i))^2}{2\sigma_i^2}}$$

最大化 P , 要求最大化指数, 即最小化 $\sum \frac{(y_i - y(x_i))^2}{2\sigma_i^2}$ 。

这种方法称之为最小二乘法（或最小平方法）。

指数称为卡方(chi square)：

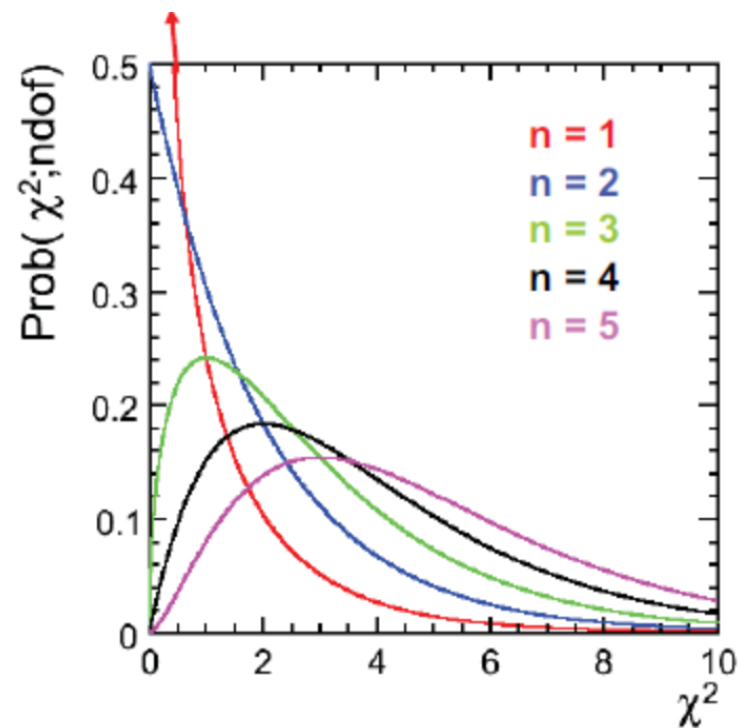
$$\chi^2 = \sum \frac{(y_i - y(x_i))^2}{\sigma_i^2}$$



1.6.5 拟合数据：最小二乘法

➤ 卡方的概率分布：若 n 个随机变量 $Z_1 \dots Z_n$ 是相互独立且符合标准正态分布的随机变量（数学期望为0、方差为1），则随机变量 Z 的平方和的分布。

（注：自由度 n 很大时，趋于高斯分布）



1.6.5 拟合数据：最小二乘法

➤ 卡方

- 平均值： $\mu_{\chi^2} = \nu$ （自由度,即数据点的数目减去参数的数目）
- 方差： $\sigma_{\chi^2}^2 = 2\nu$

➤ 简化的卡方 = 卡方 / 自由度

- 平均值： $\mu_{\text{reduced-}\chi^2} = 1$
- 方差： $\sigma_{\text{reduced-}\chi^2}^2 = \frac{2}{\nu}$

1.6.5 拟合数据：最小二乘法

➤ 线性拟合可以用于很多函数：

$$y=ae^x$$

$$\underline{\ln(y)} = \underline{x} + \ln(a)$$

$$y=ax^b$$

$$\underline{\ln(y)} = b \underline{\ln(x)} + \ln(a)$$

1.6.5 拟合数据：最小二乘法

➤ 怎么判断模型正确地描述数据？

简化的卡方值在1.0的1-2 sigma以内。

➤ 怎么计算参数的误差？

变化参数的值，使得简化的卡方增加1个sigma。

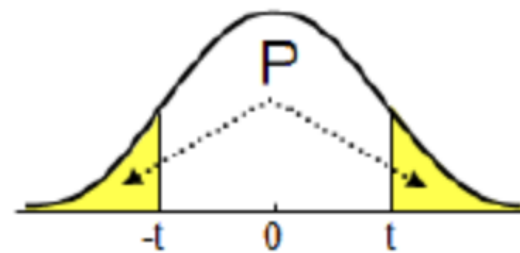
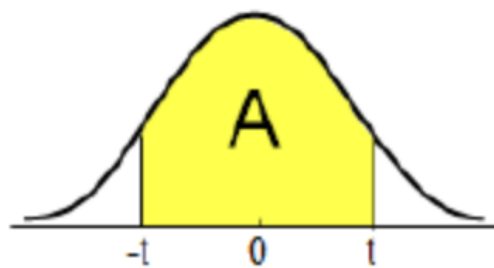
1.6.6 比较两组数据

- 学生t检验：比较两组高斯分布的**平均数**是否一样。

$$v = m + n - 2$$

$$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{s \sqrt{1/m + 1/n}}$$

$$s^2 = \frac{nS_x^2 + mS_y^2}{n + m}$$



DF	A	0.80	0.90	0.95	0.98	0.99	0.995	0.998	0.999
	P	0.20	0.10	0.05	0.02	0.01	0.005	0.002	0.001
1		3.078	6.314	12.706	31.820	63.657	127.321	318.309	636.619
2		1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	22.327	31.599
3		1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.215	12.924
4		1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5		1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6		1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7		1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8		1.397	1.860	2.306	2.897	3.355	3.833	4.501	5.041
9		1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10		1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11		1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437

1.6.6 比较两组数据

- *f*检验: 两组高斯分布数据的方差一样的可能性。

$$F = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 / (n-1)}{\sum (y_i - \bar{y})^2 / (m-1)}$$

1.6.6 比较两组数据

➤ 非参数化检验（即不知道数据是什么分布）：

- 卡方检验：两组数的频率分布是否一致。
- K-S检验：通过比较数据的累计频率分布来判断两组数据是否一致。

(http://www.physics.csbsju.edu/stats/KS-test.n.plot_form.html)

